Ejercicio 1. Demuestra por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Solución. $\underline{k=1}$: $1^2 = \dfrac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3}$ (se cumple).
$\underline{k \Rightarrow k+1}$: Supongamos que $1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \dfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ y vamos a ver que entonces $1^2 + 3^2 + \cdots + (2(k+1)-1)^2 = \dfrac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3} = \dfrac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \cdots + (2(k+1)-1)^2 &= (1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2) + (2(k+1)-1)^2 \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2 \text{ (por H.I)} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(k(2k-1)+3(2k+1))(2k+1)}{3} \\
&= \frac{(2k^2-k+6k+3))(2k+1)}{3} = \frac{(2k^2+5k+3))(2k+1)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3} \text{ (se cumple)}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Demuestra que $2n+1 < n^2$ para todo $n \geq 3$.
Solución. $\underline{k=3}$: $2\cdot 3+1 < 3^2$ (se cumple).
$\underline{k \Rightarrow k+1}$: Supongamos que $2k+1 < k^2$ y vamos a ver que entonces $2(k+1)+1 < (k+1)^2$:
En efecto, $2(k+1)+1 = 2k+1+2 < k^2+2 < k^2+1+1 < k^2+2k+1 = (k+1)^2$ (se cumple)

(H.I)

Ejercicio 3. Se define la sucesión de numeros $t_1, t_2, t_3, \ldots$ mediante: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$, para todo $n \geq 4$. Demuestra que $t_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Solución. $\underline{k=4}$: $t_4 = t_1 + t_2 + t_3 = 1+2+3 = 6 < 2^4$ (se cumple).
$\underline{\{1,2,\ldots,k-1\} \Rightarrow k}$: Supongamos que $t_i < 2^i$ para todo $i \in \{4,5,6,\ldots,k-1\}$ y vamos a ver que entonces $t_k < 2^k$:
En efecto, $t_k = t_{k-1} + t_{k-2} + t_{k-3} < 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} < 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots 2 + 1 < 2^k$ (se cumple)

(H.I)

Ejercicio 4. Halla la representación en base 2, 7 y 11 de los siguientes numeros expresados en base decimal: 137, 6243, 762, 1995.

Solución. $137_{10} = 10001001_2 = 254_7 = 115_{11}$, $762_{10} = 1011111010_2 = 2136_7 = 633_{11}$, $1995_{10} = 11111001011_2 = 5550_7 = 1554_{11}$, $6243_{10} = 1100001100011_2 = 24126_7 = 4766_{11}$.

Ejercicio 5. Halla la representación usual (en base 10) de 11011101_2, 4165_7, 1995_{11}, 1213_7, 1213_5.
Solución. $11011101_2 = 221_{10}$, $4165_7 = 1468_{10}$, $1995_{11} = 2524_{10}$, $1213_7 = 451_{10}$, $1213_5 = 183_{10}$.

Ejercicio 6. Usa el Algoritmo de Euclides para calcular $d = mcd(a, b)$, y encuentra x e y tales que $d = ax + by$.
a) $a = 1312$, b =800. b) $a = 322$, $b = 406$.

Solución.
a) Se tiene que $1312 = 1{\cdot}800{+}512$, $800 = 1{\cdot}512{+}288$, $512 = 1{\cdot}288{+}224$, $288 = 1{\cdot}224{+}64$, $224 = 3 \cdot 64 + 32$ y $64 = 2 \cdot 32$.

Entonces $mcd(1312, 800) = mcd(800, 512) = mcd(512, 288) = mcd(288, 224) = mcd(224, 64) = mcd(64, 32) = 32$. Además,

$$\begin{aligned}32 &= 224 - 3 \cdot 64 = 224 - 3(288 - 224) = (-3) \cdot 288 + 4 \cdot (512 - 288) = 4 \cdot 512 - 7 \cdot (800 - 512)\\ &= (-7) \cdot 800 + 11 \cdot (1312 - 800) = 11 \cdot 1312 - 18 \cdot 800.\end{aligned}$$

b) Se tiene que $406 = 322 + 84$, $322 = 3 \cdot 84 + 70$, $84 = 1 \cdot 70 + 14$, $70 = 14 \cdot 5$.
Entonces $mcd(406, 322) = mcd(322, 84) = mcd(84, 70) = mcd(70, 14) = 14$. Además,

$$14 = 84 - 70 = 84 - (322 - 3 \cdot 84) = 4 \cdot 84 - 322 = 4(406 - 322) - 322 = 4 \cdot 406 - 5 \cdot 322.$$

Ejercicio 7. Se dispone de un suministro ilimitado de agua, un gran cubo con un desagüe y dos garrafas que contienen 7 y 9 litros respectivamente, como podría ponerse un litro de agua en el cubo?
Solución. Tenemos que encontrar las soluciones de $9x + 7y = 1$.
- $mcd(9, 7) = mcd(7, 2) = mcd(2, 1) = 1$.
- una solución particular de $9x + 7y = 1$ es $x_0 = 4$, $y_0 = -3$.

Ejercicio 8. Calcula las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $28x + 36y = 44$. b) $66x + 550y = 88$. c) $966x + 686y = 70$.

Solución.
a) - $mcd(36, 28) = mcd(28, 8) = mcd(8, 4) = 4$.
- Una solución particular de $28x + 36y = 4$ es $x_0 = 4$, $y_0 = -3$.
- Una solución particular de $28x + 36y = 44$ es $x_0 = 44$, $y_0 = -33$.
- La solución general de $28x + 36y = 44$ es $\begin{cases} x = 44 + \dfrac{36}{4}k = 44 + 9k \\ y = -33 - \dfrac{28}{4}k = -33 - 7k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) - $mcd(550, 66) = mcd(66, 22) = 22$.
- Una solución particular de $66x + 550y = 22$ es $x_0 = -8$, $y_0 = 1$.
- Una solución particular de $66x + 550y = 88$ es $x_0 = -32$, $y_0 = 4$.
- La solución general de $66x + 550y = 88$ es $\begin{cases} x = -32 + \dfrac{550}{22}k = -32 + 25k \\ y = 4 - \dfrac{66}{22}k = 4 - 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) - $mcd(966, 686) = mcd(686, 280) = mcd(280, 126) = mcd(126, 28) = mcd(28, 14) = 14$.
- Una solución particular de $966x + 686y = 14$ es $x_0 = -22$, $y_0 = 31$.

- Una solución particular de $966x + 686y = 70$ es $x_0 = -110$, $y_0 = 155$.

- La solución general de $966x+686y = 70$ es $\left\{\begin{array}{l} x = -110 + \dfrac{686}{14}k = -110 + 49k \\ y = 155 - \dfrac{966}{14}k = 155 - 69k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y =$ c tiene solución y determínala, en su caso.

Solución. - $mcd(990, 84) = mcd(84, 66) = mcd(66, 18) = mcd(18, 12) = mcd(12, 6) = 6$. Luego $84x + 990y =$ c, $10 < c < 20$, tiene solución si y solo si $c = 12$ ó $c = 18$.
- Una solución particular de $84x + 990y = 6$ es $x_0 = 59$, $y_0 = -5$.
- Una solución particular de $84x + 990y = 12$ es $x_0 = 118$, $y_0 = -10$, y una solución particular de $84x + 990y = 18$ es $x_0 = 177$, $y_0 = -15$.
- La solución general de $84x + 990y = 12$ es $\left\{\begin{array}{l} x = 118 + \dfrac{990}{6}k = 118 + 115k \\ y = -10 - \dfrac{84}{6}k = -10 - 14k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$, y

la solución general de $84x + 990y = 18$ es $\left\{\begin{array}{l} x = 177 + \dfrac{990}{6}k = 177 + 115k \\ y = -15 - \dfrac{84}{6}k = -15 - 14k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 10. Un turista tiene 1000 coronas checas y quiere cambiar ese dinero en una cantidad exacta de libras chipriotas y zlotys polacos. El cambio que le ofrece una cierta Oficina de Cambio es el siguiente: un zloty polaco = 13 coronas checas y una libra chipriota = 18 coronas checas. La oficina no proporciona fracciones de ninguna moneda, ¿de cuantas formas diferentes puede hacerlo? Describe una de dichas formas.

Solución. Tenemos que encontrar las soluciones de $13x + 18y = 1000$ con $x, y \geq 0$.
- $mcd(18, 13) = mcd(13, 5) = mcd(5, 3) = mcd(3, 2) = mcd(2, 1) = 1$.
- Una solución particular de $13x + 18y = 1$ es $x_0 = -11$, $y_0 = 8$.
- Una solución particular de $13x + 18y = 1000$ es $x_0 = -11000$, $y_0 = 8000$.
- La solución general de $13x + 18y = 1000$ es $\left\{\begin{array}{l} x = -11000 + 18k \\ y = 8000 - 13k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -11000 + 18k \geq 0 \\ 8000 - 13k \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 18k \geq 11000 \\ 13k \leq 8000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{11000}{18} \leq k \leq \dfrac{8000}{13} \Leftrightarrow$ $612 \leq k \leq 615$.

Por tanto, el cambio de moneda se puede hacer de 4 formas diferentes, con $k \in \{612, 613, 614, 615\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 18 \\ y = 44 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} x = 34 \\ y = 31 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} x = 52 \\ y = 18 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} x = 70 \\ y = 5 \end{array}\right. .$$

Ejercicio 11. Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones de Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera, solamente? En caso afirmativo, ¿cuantas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá?
Solución. Tenemos que encontrar las soluciones de $614x + 89y = 1000$ con $x \leq 0, y \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 614 = 89 \times 6 + 80 \\ 89 = 80 \times 1 + 9 \\ 80 = 9 \times 8 + 8 \\ 9 = 8 \times 1 + 1 \\ 8 = 1 \times 8 + 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{el } mcd(614, 89) = 1. \text{ Se cumple además que:} \\ x_0 = -10, y_0 = 69, \text{ son soluciones particulares} \\ \text{de la ecuación diofántica: } 614x + 89y = 1. \end{array}$$

Una solución particular de $614x + 89y = 1000$ es $x_0 = -10000$, $y_0 = 69000$.

La solución general de $641x + 89y = 1000$ es $\left\{\begin{array}{l} x = -10000 + 89t \\ y = 69000 - 614t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -10000 + 89t \leq 0 \\ 69000 - 614t \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \leq \frac{10000}{89} \approx 112.36 \\ t \leq \frac{69000}{614} \approx 112.38 \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \leq 112.$$

El número mínimo de acciones de cada tipo que, como mínimo, tiene que comprar y vender se obtiene para $t = 112$ y será $\left\{\begin{array}{l} x = -10000 + 89 \times 112 = -32 \\ y = 69000 - 614 \times 112 = 232 \end{array}\right\}$.

Ejercicio 12. Una determinada empresa tiene que transportar 910 paquetes de su producto, para ello dispone de dos transportistas T1 y T2. Se sabe que cada envío de T1 transporta 325 paquetes, mientras que cada envío de T2 sólo tranporta 26. ¿Cuántos envíos debe hacer con T1 y T2 para cumplir, el objetivo previsto de los exactamente 910 paquetes. Teniendo en cuenta que T1 cobra 10.000 euros por envío y T2 sólo 1000 euros,¿cuál de las soluciones anteriores es de coste mínimo?

Solución.

Sea $x =$ n^o de envíos por $T1$ y sea $y =$ n^o de envíos por $T2$ por tanto el planteamiento será:

Planteamos la ecuación: $325x + 26y = 910$ pero sólo valdrán la soluciones con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Aplicamos el algoritmo de Euclides para obtener que $mcd(325, 26) = 13$, además se cumple que $X_0 = 1, Y_0 = -12$, son soluciones particulares de la ecuación diofántica $325x + 26y = 13$. Por tanto $X_0 = 70, Y_0 = -840$, son soluciones particulares de la ecuación diofántica $325x + 26y = 910$. Entonces las soluciones que nos interesan son las que verifican el sistema de desigualdades:

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & 70 + 2t \geq 0 \\ y = & -840 - 25t \geq 0 \end{array}\right. : dondet \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geq -35 \\ t \leq -33.6 \end{array}\right. \Rightarrow t \in \{-34, -35\}$$

Soluciones:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{si } t = -34 & x = 2, y = 10 & \text{el coste es de } 2 \times 10000 + 10 \times 1000 = 30\,000 \text{ euros} \\ \text{si } t = -35 & x = 0, y = 35 & \text{el coste es de } 0 \times 10000 + 35 \times 1000 = 35\,000 \text{ euros} \end{array}\right.$$

Por tanto la solución óptima es: $x = 2, y = 10$

Ejercicio 13. Demuestra que si p es primo distinto de 2 y de 5 entonces, o bien $p^2 - 1$, o bien $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Solución. Expresamos a en la forma $p = 10c + r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ es el resto de dividir p entre 10.

Como p es primo distinto de 2 y de 5, $r \in \{1, 3, 7, 9\}$.

$$\text{Entonces } p^2 = \begin{cases} (10c+1)^2 = (100c^2+20c+1) & \Rightarrow p^2-1 = 10(10c^2+2c) \\ \quad \text{ó} & \\ (10c+3)^2 = (100c^2+60c+9) & \Rightarrow p^2+1 = 10(10c^2+6c+1) \\ \quad \text{ó} & \\ (10c+7)^2 = (100c^2+140c+49) & \Rightarrow p^2+1 = 10(10c^2+14c+5) \\ \quad \text{ó} & \\ (10c+9)^2 = (100c^2+180c+81) & \Rightarrow p^2-1 = 10(10c^2+18c+8) \end{cases}$$

Ejercicio 14. Demuestra que el cuadrado de todo numero entero es de la forma $4k$ o $4k+1$.
Demuestra que el cubo de todo numero entero es de la forma $9k$ o $9k+1$ o $9k+8$.

Solución. a) Todo entero n se puede expresar de la forma $p = 2c + r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1\}$ es el resto de dividir n entre 2.

$$\text{Entonces } n^2 = \begin{cases} (2c)^2 = 4c^2 \\ \quad \text{ó} \\ (2c+1)^2 = 4c^2+4c+1 = 4(c^2+c)+1 \end{cases}$$

b) Todo entero n se puede expresar de la forma $p = 3c + r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1, 2\}$ es el resto de dividir n entre 2.

$$\text{Entonces } n^3 = \begin{cases} (3c)^3 = 27c^3 = 9(3c^3) \\ \quad \text{ó} \\ (3c+1)^3 = 27c^3+27c^2+9c+1 = 9(3c^3+3c^2+c)+1 \\ \quad \text{ó} \\ (3c+2)^3 = 27c^3+54c^2+36c+8 = 9(3c^3+6c^2+4c)+8 \end{cases}$$

Ejercicio 15. Si $a \in \mathbb{Z}$ y no es múltiplo de 2 ni de 3 demuestra que $24|a^2-1$.

Solución. Expresamos a en la forma $p = 12c + r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1, 2, \dots 11\}$ es el resto de dividir n entre 12.

Como a no es múltiplo de 2 ni de 3, $r \in \{1, 5, 7, 11\}$.

$$a^2-1 = \begin{cases} (12c+1)^2-1 = (144c^2+24c+1)-1 = 144c^2+24c = 24(6c^2+c) \\ \quad \text{ó} \\ (12c+5)^2-1 = (144c^2+120c+25)-1 = 144c^2+120c+24 = 24(6c^2+5c+1) \\ \quad \text{ó} \\ (12c+7)^2-1 = (144c^2+168c+49)-1 = 144c^2+168c+48 = 24(6c^2+7c+2) \\ \quad \text{ó} \\ (12c+11)^2-1 = (144c^2+264c+121)-1 = 144c^2+264c+120 = 24(6c^2+11c+5) \end{cases}$$

Ejercicio 16. Demuestra que si 5 no divide a n entonces 5 divide a n^8-1.

Solución. Se tiene que $n^8-1 = (n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1)$.

Como n no divide a 5, $n = 5c + r$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces:
-si $n = 5c+1$, entonces $n-1 = 5c$ es múltiplo de 5 y por tanto n^8-1 también,
-si $n = 5c+2$, entonces $n^2+1 = 5c^5+10c+5$ es múltiplo de 5 y por tanto n^8-1 también,
-si $n = 5c+3$, entonces $n^2+1 = 5c^5+30c+10$ es múltiplo de 5 y por tanto n^8-1 también,
-si $n = 5c+4$, entonces $n+1 = 5c+5$ es múltiplo de 5 y por tanto n^8-1 también.

Ejercicio 17. Estudia si son o no primos, los numeros 811, 493 y 911.
Solución. Como $23 < \sqrt{811} < 29$, tenemos que comprobar solo si 911 es divisible por los números primos 2,3,5,7,11,13,17,19,23. Como no es divisible por ninguno de ellos, 811 es primo.

Como $19\sqrt{493} < 23$, tenemos que comprobar solo si 911 es divisible por los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Como $493 = 17 \cdot 29$, 493 no es primo.

Como $30 < \sqrt{911} < 31$, tenemos que comprobar solo si 911 es divisible por los números primos 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29. Como no es divisible por ninguno de ellos, 911 es primo.

Ejercicio 18. Averigua si son primos o compuestos los números: 1103, 3137 y 2809
Solución.
a) Observamos que $\sqrt{1103} = 33.211..$ Entonces, 1103 es primo pues **no es divisible** por ningún primo $t \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$

b) Observamos que $\sqrt{3137.} = 56.009..$ Entonces, 3137 es primo pues **no es divisible** por ningún primo $t \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53\}$

c) Observamos que $\sqrt{2809} = 53.0$ Entonces, 2809 no es primo pues **es divisible** por 53

Ejercicio 19. Demuestra que todo numero primo $p > 3$ se puede escribir de la forma
a) $4n + 1$ o $4n + 3$ para algún $n \in \mathbb{N}$. b) $6n + 1$ o $6n + 5$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Solución. a) Todo $p > 3$ se puede expresar de la forma $p = 4c + r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ es el resto de dividir n entre 4.

Si $r = 0$, entonces p es múltiplo de 4 y por tanto no puede ser primo. Si $r = 2$, entonces p es múltiplo de 2 y como $p > 2$ no puede ser primo.

Luego las únicas posibilidades con p primo son $r = 1$ o $r = 3$ (ambas se dan: $5 = 4+1$, $7 = 4 + 3$).

b) Todo $p > 3$ se puede expresar de la forma $p = 6c+r$ (c es el cociente y $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ es el resto de dividir n entre 6.

Si $r = 0$ ó 3, entonces p es múltiplo de 3 y como $p > 3$ no puede ser primo. Si $r = 0$, 2 ó 4, entonces p es múltiplo de 2 y como $p > 2$ no puede ser primo.

Luego las únicas posibilidades con p primo son $r = 1$ o $r = 5$ (ambas se dan: $7 = 6+1$, $11 = 6 + 5$).

Ejercicio 20. Demuestra que si n es un entero positivo, ninguno de los n enteros consecutivos empezando por $(n + 1)! + 2$ es primo.

Solución. Como $(n + 1)! + 2 = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$, entonces:
-$(n + 1)! + 2 = (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 + 2$ es divisible por 2,
-$(n + 1)! + 3 = (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 + 2$ es divisible por 3,
-$(n + 1)! + 4 = (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 + 4$ es divisible por 4,
$\vdots$
-$(n + 1)! + n = (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 + n$ es divisible por n,
-$(n + 1)! + (n + 1) = (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 + (n + 1)$ es divisible por $n + 1$.

Ejercicio 21. En la Facultad de Informática se quieren equipar las aulas con un ordenador y una pizarra digital por aula. Suponiendo que se tiene un presupuesto de 6750 , que cada ordenador cuesta 450 y cada pizarra digital 825 , ¿cuántos ordenadores y

pizarras se pueden comprar agotando exactamente todo el presupuesto?
Solución.
Sean $x = n^o$ de ordenadores e $y = n^o$ de pizarras que se pueden comprar como máximo. Resolvemos la ecuación diofántica: $450x + 825y = 6750$. Aplicando el algoritmo de Euclides resulta

$$\begin{aligned} 825 &= 450 + 375 \\ 450 &= 375 + 75 \Rightarrow (450.825) = 75|6750 = 75 \times 90 \\ 375 &= 75 \times 5 \end{aligned}$$

Por tanto, existen soluciones.

$75 = 450-375 = 450-(825-450) = 2\times 450-825 \quad 6750 = 90\times 75 = 180\times 450-90\times 825$

$$\begin{cases} x &= 180 + \dfrac{825}{75}t = 180 + 11t \geq 0 \Rightarrow t \geq \dfrac{-180}{11} \\ \\ y &= -90 - \dfrac{450}{75}t = -90 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq \dfrac{-90}{6} \end{cases}$$

luego las posibilidades son

$$t = \begin{cases} -15 & \Rightarrow & x = 15, y = 0 \\ -16 & \Rightarrow & x = 4, y = 6 \end{cases}$$

Ejercicio 22. Halla, si existen, los inversos de:
a) Z_{15} $\longrightarrow$**Solución.** $U_{15} = \{\ 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$
b)Z_{42} $\longrightarrow$**Solución.** $U_{42} = \{\ 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}$
c) 777^{-1} en Z_{1009} . **Solución.**
Ya que $mcd(777, 1009) = 1$, tenemos que $x_0 = -274$, es solución particular para x en la ecuación diofántica: $777x + 1009y = 1$, obtenida por el algoritmo de Euclides.
Por tanto en Z_{1009}: $777^{-1} = -274 = 735$

Ejercicio 23. Resuelve las ecuaciones:

i) $28x = 77$ en Z_{637} con $0 \leq x < 637$.
Solución.
$mcd(637, 28) = 7$. Por lo tanto tendremos 7 soluciones en Z_{637}. Se cumple además que $X = 23, Y = -1$, son soluciones particulares de la ecuación diofántica: $7 = 28X + 637Y$. Entonces $X = 253, Y = -11$ serán soluciones de $77 = 28X + 637Y$. Las soluciones vendrán dadas por la fórmula: $\left\{\ x = \ 253 + 91t \in Z_{637}\ \right\}$. donde $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ii) $35^{346}x = 2$ en Z_{41} :
Solución.

$|U_{41}| = 40$.
En Z_{41} $35^{346} = 35^{40\times 8}35^{26} = 35^{26} = 5^{26}7^{26} = \left(5^3\right)^8 5^2 \left(7^2\right)^{13} =$
$2^8 5^2 8^{13} = 2^{47}5^2 = 2^7 5^2 = 55^2 = 125 = 2$
Sustituyendo y despejando en la ecuación tenemos $x = 1$

Ejercicio 24. Enuncia el teorema de Euler y aplícalo para calcular el resto de dividir 5^{28575} entre 17.

Solución.

$|U_{17}| = 16$ y $5 \in U_{17}$, por el teorema de Euler $5^{16} = 1$ en Z_{17}. Ya que $28575 \bmod 16 = 15$ tenemos que en Z_{17}

$5^{3540} = 5^{16\times 1785+15} = 5^{15} = 5^{-1} = 7$

Ejercicio 25. Calcula:

a) El número de elementos que tienen inverso en $\mathbb{Z}_{25725}$.

Solución: Como $25725 = 3 \times 5^2 \times 7^3$, el cardinal de las unidades en $\mathbb{Z}_{25725}$ es

$$\phi(25725) = \phi(3) \times \phi(5^2) \times \phi(7^3) = 2 \times\ 20 \times 294 = 11760.$$

b) $\overline{x}$ en $\mathbb{Z}_9$ tal que $\overline{21}\overline{x} = \overline{6}$

Solución:

Como el $mcd(21, 9) = 3$ y $3 \mid 6$, la ecuación tiene 3 soluciones en $\mathbb{Z}_9$. Si simplificamos nos queda la ecuación: $\overline{3}\overline{x} = \overline{6}$ que tiene como solución particular $\overline{x} = \overline{2}$, por tanto las tres soluciones en $\mathbb{Z}_9$ son: $\left\{\overline{x} = \overline{2} + \overline{3}\overline{t} \text{ donde } t \in \{0, 1, 2\}\right\} = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$

Ejercicio 26. Enuncia el teorema de Euler y aplícalo para resolver la siguiente ecuación

$$\overline{2010}^{214} \;=\; \overline{2}\overline{x} \text{ en } \mathbb{Z}_{91} \text{ con } 0 \leq x < 91$$

Solución:

Tenemos que $\overline{2010} = \overline{8}$ en $\mathbb{Z}_{91}$, además $mcd(8, 91) = 1$ y $\phi(91) = \phi(7) \times \phi(13) = 6 \times 12 = 72 \Rightarrow$ por Euler $\overline{8}^{72} = \overline{1}$ en $\mathbb{Z}_{91}$, de donde

$$\overline{2010}^{214} = \overline{8}^{72\times 2+70} \;=\; (\overline{8}^{72})^2 \times \overline{8}^{70} = \overline{8}^{70}$$

Simplifiquemos la ecuación:

$$\begin{cases} \overline{8}^{70} &= \overline{2}\overline{x} \\ \overline{8}^{72} &= \overline{8}^2 \times \overline{2}\overline{x} = \overline{128}\overline{x} = \overline{37}\overline{x} \\ \overline{1} &= \overline{37}\overline{x} \Rightarrow \overline{x} = (\overline{37})^{-1} \Rightarrow \overline{x} = \overline{32} \end{cases}$$

Ejercicio 27. Calcula 19^{191} en $\mathbb{Z}_{221}$

Solución:

Dado que $221 = 13 \times 17$ y que $mcd(19, 221) = 1$, podemos aplicar el teorema de Euler y afirmar que $19^{\Phi(221)} = 1$ en $\mathbb{Z}_{221}$ siendo $\Phi(221)$ el cardinal de las unidades de $\mathbb{Z}_{221}$. Como $\Phi(221) = \Phi(13) \times \Phi(17) = 12 \times 16 = 192$. Por lo que en $\mathbb{Z}_{221}$ $19^{\Phi(221)} = 19^{192} = 19^{191} \times 19 = 1$. Tenemos entonces: $19^{191} = 19^{-1}$. Para hallar este inverso aplicamos el algoritmo de Euclides:

$$\left.\begin{array}{l} 221 = 19 \times 11 + 12 \\ 19 = 12 \times 1 + 7 \\ 12 = 7 \times 1 + 5 \\ 7 = 5 \times 1 + 2 \\ 5 = 2 \times 2 + 1 \\ 2 = 1 \times 2 + 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{el } mcd(221,19) = 1. \text{ Se cumple además que:} \\ X_0 = 8, Y_0 = -93, \text{ son soluciones particulares} \\ \text{de la ecuación diofántica: } 1 = 221X + 19Y \\ \text{En } \mathbb{Z}_{221}\ 19^{191} = 19^{-1} = -93 = 128 \end{array}$$

Ejercicio 28. Resolver (si es que tiene solución) el sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7x+1 & \equiv & 5(\bmod 12) \\ 3x & \equiv & 5(\bmod 7) \\ 3x & \equiv & 1(\bmod 5) \end{array}\right.$$

Solución:

$$\text{Despejando} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x \equiv & 4(\bmod 12) \\ x \equiv & 4(\bmod 7) \\ x \equiv & 2(\bmod 5) \end{array}\right.$$

Aplicamos el Teorema Chino del Resto

$$\left\{\begin{array}{ll} 35 \text{ y } 11 \text{ son tales que} & 35 \times 11 \equiv 1(\bmod 12) \\ 60 \text{ y } 2 \text{ son tales que} & 60 \times 2 \equiv 1(\bmod 7) \\ 84 \text{ y } 4 \text{ son tales que} & 84 \times 4 \equiv 1(\bmod 5) \end{array}\right.$$

Entonces, obtenemos la solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x \equiv (4 \times 35 \times 11 + 4 \times 60 \times 2 + 2 \times 84 \times 4)(\bmod 420) = 2692(\bmod 420) = 172(\bmod 420) \\ x \equiv 172(\bmod 420) \end{array}\right.$$

Ejercicio 29. Se han lanzado, en un ordenador, tres procesos que periódicamente acceden a un recurso compartido. Si dos de ellos accecen de forma simultánea no hay problemas, pero si lo hacen los tres se producirá un bloqueo. Considerando los datos de la siguiente tabla:

Proceso	accede por primera vez al recurso	accede cada
1	10:00 horas	5 minutos
2	10:02 horas	12 minutos
3	c minutos después de las 10 horas	4 minutos

Si llamamos x al número de minutos transcurridos después de las10:00 horas hasta la ocurrencia de un bloqueo,

1. Demuestra que se producirá un bloqueo si y sólo si $c \equiv 2 \bmod 4$.
   Solución
   Si se produce un bloqueo, el siguiente sistema tiene solución:

$$\left\{\begin{array}{rl} x \equiv & 0(\bmod 5) \\ x \equiv & 2(\bmod 12) \\ x \equiv & c(\bmod 4) \end{array}\right.$$

   En particular de las dos últimas ecuaciones tenemos
   $c(\bmod 4) = 2(\bmod 12) \Rightarrow c - 2 = 12k - 4t \forall k,t \in \mathbb{Z} \Rightarrow c - 2 = 4(3k-t) \forall k,t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 4 \mid (c-2) \Rightarrow c \equiv 2 \bmod 4$.
Por otro lado, si $c \equiv 2 \bmod 4$.

$$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv & 2 \pmod{12} \\ x \equiv & 2 \pmod 4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 12k - 4t \text{ buscamos soluciones particulares:} \\ k_0 = 0, t_0 = 0 \Rightarrow k = 0 + s \forall s \in \mathbb{Z} \\ x = 2 + 12k = 2 + 12s \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{12} \end{array}\right.$$

Si imponemos ahora que se verifique la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv & 0 \pmod 5 \\ x \equiv & 2 \pmod{12} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Como } 5 \times 5 = 1 \pmod{12}, \text{ aplicamos el Teorema Chino del Resto:} \\ x \equiv 2 \times 5 \times 5 + 0 \times (....) \pmod{60} = 50 \pmod{60} \end{array}\right.$$

Por tanto, el sistema tiene solución y se producirá un bloqueo a las 10:50 horas.

2. Si $c = 6$, encuentra la hora del primer bloqueo que se producirá entre las 10:00 y 11:00.
   Solución Para $c = 6$ el sistema es equivalente al anterior, ya que la ecuación: $x \equiv 6 \pmod 4$ es equivalente a $x \equiv 2 \pmod 4$. Por tanto la solución será la misma y se producirá un bloqueo a las 10:50 horas.

Ejercicio 30. Calcula $5^{2003} \bmod 13$, $5^{2003} \bmod 11$, $5^{2003} \bmod 7$. Enuncia el teorema del resto y utilízalo para calcular $5^{2003} \bmod 1001$
Solución.
$5^{2003} \bmod 13 = 5^{12\times 166+11} \bmod$
$13 = 5^{11} \bmod 13 = 5^{-1} \bmod 13 = 8$
$5^{2003} \bmod 11 = 4.0 = 5^{10\times 200+3} \bmod 11 = 5^3 \bmod 11 = 4$
$5^{2003} \bmod 7 = 5^{6\times 333+5} \bmod$
$7 = 5^5 \bmod 7 = 5^{-1} \bmod 7 = 3$

Como acabamos de ver 5^{2003} es solución del siguiente sistema :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 8 \bmod 13 \\ x & = & 4 \bmod 11 \\ x & = & 3 \bmod 7 \end{array}\right.$$

El teorema del resto garantiza que este sistema tiene una única solución, módulo $13 \times 11 \times 7 = 1001$, y nos da la solución
$x = 8 \times 77 \times (-1) + 4 \times 91 \times 4 + 3 \times 143 \times 5 = 2985 \bmod 1001 = 983$

Ejercicio 31. Resolver (si es que tiene solución) los sistema de congruencias

a) $\left\{\begin{array}{ll} 5x \equiv & 6 \pmod{12} \\ 2x \equiv & 5 \pmod 7 \\ 3x \equiv & 1 \pmod 5 \end{array}\right.$ Despejando $\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x \equiv & 6 \pmod{12} \\ x \equiv & 20 \pmod 7 \\ x \equiv & 2 \pmod 5 \end{array}\right.$

Aplicamos el teorema

35 y 11son tales que $35.11 = 1(mod 12)$
60 y 2 son tales que $60.2 = 1(mod 7)$
84 y 4 son tales que $84.4 = 1(mod 5)$
$x = (6.35.11 + 20.60.2 + 2.84.4) \text{ mod } 420 = 5382 \text{ mod } 420 = 342 \text{ mod } 420$
$x = 342$ en Z_{420}

El entero solución del sistema es 342

b) $\left\{ \begin{array}{rl} 21x \equiv & 15(\bmod 30) \\ 6x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right.$

Para resolver este sistema se hace uso de la **propiedad cancelativa** general:

$ac = bc(\bmod m) \quad \Rightarrow \quad a = b(\bmod \dfrac{m}{mcd(m,c)})$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 21x \equiv & 15(\bmod 30) \\ 6x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 3 \times 7x \equiv & 3 \times 5(\bmod 30) \\ 6x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 7x \equiv & 5(\bmod 10) \\ x \equiv & -4 \times 5(\bmod 25) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x \equiv & 3 \times 5(\bmod 10) \\ x \equiv & -20(\bmod 25) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x \equiv & 15(\bmod 10) \\ x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right. \Rightarrow \text{igualando}$$

$\left\{ \; 25k - 10t = 10 \quad \Longrightarrow t = 4 - 5q \quad x = 15 + 10(4 - 5q) \quad \Rightarrow x = 55 - 50q \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rl} 120x \equiv & 180(\bmod 450) \\ 24x \equiv & 76(\bmod 100) \end{array} \right.$

Para resolver este sistema se hace uso de la **propiedad cancelativa** general:

$ac = bc(\bmod m) \quad \Rightarrow \quad a = b(\bmod \dfrac{m}{mcd(m,c)})$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 120x \equiv & 180(\bmod 450) \\ 24x \equiv & 76(\bmod 100) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2 \times 60x \equiv & 3 \times 60(\bmod 450) \\ 6 \times 4x \equiv & 19 \times 4(\bmod 100) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x \equiv & 3(\bmod 15) \\ 6x \equiv & 19(\bmod 25) \end{array} \right.$$

pues $mcd(450, 60) = 30$ y $mcd(100, 4) = 4$. Multiplicando la primera ecuación por 8, que es el inverso de $2(mod 15)$, **depejamos** x

$x \equiv 24(mod 15) \equiv 9(mod 15)$, de donde $x = 9 + 15k$. **Sustituyendo en la segunda** ecuación: $6 \times (9 + 15k) \equiv 19(mod 25) \Rightarrow 4 + 15k \equiv 19(mod 25) \Rightarrow 15k \equiv 15(mod 25)$, que cancelando obtenemos: $k \equiv 1(mod 5)$ de donde $k \equiv 1 + 5t$ sustituyendo en el valor de x resulta $x = 9 + 15(1 + 5t) = 24 + 75t$, es decir,

$$x \equiv 24(\bmod 75)$$

Ejercicio 32. Resuelve la siguiente ecuación $975^{574}x \;=\; 9$ con $0 \leq x < 323$
Solución: Como $323 = 17 \times 19$, el cardinal de las unidades en $\mathbb{Z}_{323}$ es $\varphi(323) = 16 \times 18 = 288$. Por otro lado en $\mathbb{Z}_{323}$: $975 = 6$, de donde: $975^{574} = 6^{574} \Rightarrow$ por Euler $6^{288} = 1$ en $\mathbb{Z}_{323} \Longrightarrow \; x = 6^{288 \times 2}x = 6^{576}x = 6^2 \times 6^{574}x \;=\; 6^2 \times 9 = 324 = 1$

Ejercicio 33. Resuelve (si es que tiene solución) el sistema de congruencias

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x \equiv & 2(\bmod 7) \\ 21x \equiv & 15(\bmod 30) \\ 6x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right.$$

Solución: usando la propiedad cancelativa queda el siguiente sistema equivalente :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x \equiv & 3(\bmod 7) \\ x \equiv & 5(\bmod 10) \\ x \equiv & 5(\bmod 25) \end{array} \right.$$

que resolviendo las dos últimas e igualando a la primera obtenemos la **solución** $x = 255 + 350t \;\; \forall t \in \mathbb{Z}$